Los fundamentos de la matemática y los teoremas de Gödel

Mario A. Natiello

Centre for Mathematical Sciences
Lund University
Sweden

Contenido

Trataremos los siguientes puntos:

- Qué cosa es la matemática ?

Contenido

Trataremos los siguientes puntos:

- Qué cosa es la matemática ?
- La búsqueda de la certeza

Contenido

Trataremos los siguientes puntos:

- Qué cosa es la matemática ?
- La búsqueda de la certeza
- El programa de Russell

Contenido

Trataremos los siguientes puntos:

- Qué cosa es la matemática ?
- La búsqueda de la certeza
- El programa de Russell
- El programa de Hilbert

Contenido

Trataremos los siguientes puntos:

- Qué cosa es la matemática ?
- La búsqueda de la certeza
- El programa de Russell
- El programa de Hilbert
- Gödel o convivir con la incerteza

Contenido

Trataremos los siguientes puntos:

- Qué cosa es la matemática ?
- La búsqueda de la certeza
- El programa de Russell
- El programa de Hilbert
- Gödel o convivir con la incerteza
- Lakatos y el progreso de la ciencia

Contenido

Trataremos los siguientes puntos:

- Qué cosa es la matemática ?
- La búsqueda de la certeza
- El programa de Russell
- El programa de Hilbert
- Gödel o convivir con la incerteza
- Lakatos y el progreso de la ciencia
- Lecturas sugeridas.

Contenido

Trataremos los siguientes puntos:

- Qué cosa es la matemática ?
- La búsqueda de la certeza
- El programa de Russell
- El programa de Hilbert
- Gödel o convivir con la incerteza
- Lakatos y el progreso de la ciencia
- Lecturas sugeridas.

FIN

Qué cosa es la matemática ? I

Discusión milenaria:

- Una ciencia experimental: La matemática estudia objetos determinados por la experiencia.
- Una ciencia abstracta platónica: Los objetos de las matemáticas existen en el mundo de las ideas, mientras los objetos del mundo real son sólo un pálido reflejo de los objetos matemáticos.
- Una ciencia que estudia las relaciones entre objetos naturales una vez despojados de toda propiedad contingente.
- . . .

Qué cosa es la matemática ? II

- . . .
- Un ejercicio de lógica.
- Un sistema de convenciones que facilita las relaciones sociales, especialmente de naturaleza pública, y que a través de los siglos ha demostrado ser útil, constituyendo un ingrediente escencial de la diferencia entre la supervivencia y la muerte.

Qué cosa es la matemática ? III

- J. S. Mill: La matemática es la ciencia empírica de validez más general.
- Puede la afirmación $3 + 2 = 5$:
  - ser verificada experimentalmente?
  - ser puesta a prueba?
  - ser refutada?
- El concepto de número como abstracción de la experiencia. El número 2 representa aquello que, según nosotros, dos manzanas, dos personas, dos hojas, dos metros, dos meses, etc., tienen en común.

De vuelta a los contenidos

La búsqueda de la certeza I

El siglo XIX representó un intento de generar rigor y certeza en el edificio de las matemáticas.

- Peano: Organizar el conocimiento de los números naturales con un puñado de axiomas y reglas (inspirado por el programa de Euclides):
  - 0 es un número.
  - Todo número tiene un sucesor.
  - 0 no es el sucesor de ningún número.
  - Dos números distintos no tienen jamás el mismo sucesor.
  - Si una propiedad vale para el número 0 y cada vez que vale para un número k, también vale para el sucesor de k, entonces vale para todos los números.

La búsqueda de la certeza II

Es este sistema completo y consistente? Cómo está concebido?

- Conceptos elementales no definidos (número, sucesor, propiedad).
- Axiomas: Verdades básicas tenidas por indudables y que no necesitan demostración.
- Reglas de inferencia lógica:
    - Toda cosa es idéntica a sí misma.
    - Una afirmación matemática es o cierta o falsa, no hay una "tercera opción".
    - Modus ponens, implicación,
    - . . .

La búsqueda de la certeza III

Grietas en el edificio:

- Los axiomas no son inamovibles. Algunos axiomas se pueden substituir por otros sin perder la consistencia.
- Las reglas lógico-matemáticas pueden llevar a conclusiones inesperadas. Cantor: No todos los conjuntos infinitos son iguales, algunos se pueden contar (enumerar) y otros no.
- Paradojas lógicas.

La búsqueda de la certeza IV

- La paradoja del barbero:
  - En una isla hay un barbero que afeita sólo a todos los hombres de la isla que no se afeitan a sí mismos.
  - Quién afeita al barbero?
- Paradoja autoreferencial:
  “Esta afirmación es falsa”.
  Verdadera o falsa?
- Recurrencia infinita: En una habitación están todos los cuadros que no contienen una imagen de sí mismos. Se puede pintar un cuadro de esa habitación? Tendría ese cuadro una imagen de sí mismo ?

De vuelta a los contenidos

Bertrand Russell y el logicismo

Principia Mathematica (con Whitehead, 1910-1913).

- Definir los conceptos básicos de la matemática (Peano) en términos de conceptos de la lógica.
- Clases, clase vacía, número, operaciones aritméticas, etc.
- Variables y conectivos (“no”, “o”, “y”, “implica”).
- Teorema: Fórmula válida obtenida a partir de los axiomas y las reglas del cálculo lógico.
- Objetivo: Liberar la matemática de los problemas que generan la paradoja del barbero y similares.
- Idea: Romper la cadena autoreferencial.

De vuelta a los contenidos

Hilbert y el formalismo I

En 1899 Hilbert presentó un sistema axiomático para la geometría.

- Elementos básicos (indefinidos), axiomas y reglas de inferencia.
- Generación rutinaria de las verdades del sistema (demostrar los teoremas).
- Los conceptos indefinidos conllevan la existencia de *modelos* o *interpretaciones* del sistema de axiomas.
- Un sistema de axiomas será más o menos aplicable a un dado contenido.
- "Todo lo que puede ser objeto de pensamiento científico...entra en la esfera del método axiomático".

Hilbert y el formalismo II

Problema central:

- Es el sistema de axiomas independiente (mínimo, o sea ningún axioma es redundante relativo al grupo) ?
- Está el sistema libre de contradicciones ? (Consistencia: Los teoremas T y $\sim T$ no pueden ser ambos demostrados dentro del sistema de axiomas)

El programa de Hilbert

- Una formalización de toda la matemática: Todas las afirmaciones matemáticas deben ser escritas en un lenguaje formal preciso y manipuladas siguiendo reglas bien definidas.
- Completitud: Una demostración de que todas las afirmaciones matemáticas verdaderas pueden ser demostradas dentro del formalismo.
- Consistencia: Una demostración de que en el formalismo de la matemática no se pueden obtener contradicciones. Esta prueba debe usar preferiblemente razonamientos “finitos” acerca de objetos matemáticos finitos.

El programa de Hilbert (cont.)

- Conservación: Una prueba de que cualquier resultado acerca de “objetos reales” obtenido razonando acerca de “objetos ideales” (como conjuntos no numerables) se puede demostrar sin usar objetos ideales.
- Decidibilidad: Debe existir un algoritmo para decidir la verdad o falsedad de cualquier afirmación matemática.

Hilbert y el formalismo III

Este programa sólo puede ser llevado a cabo parcialmente.

- La consistencia de la geometría se puede reducir a la consistencia de la aritmética.
- La geometría euclideana es consistente (Tarski).
- La *lógica de primer orden* es consistente (Gödel).
- Muchas areas del conocimiento matemático se han organizado gracias a los esfuerzos axiomáticos.

De vuelta a los contenidos

Gödel o convivir con la incerteza

- Teorema 1: En cualquier sistema formal que contenga la estructura básica de la aritmética (números naturales, suma y multiplicación) se pueden construir afirmaciones aritméticas que son *verdaderas* pero *indemostrables* dentro del sistema.
  O sea: Cualquier teoría consistente suficientemente amplia es incompleta.
- Teorema 2: Para cualquier sistema formal que contenga la estructura básica de la aritmética, el sistema contiene una afirmación sobre la propia consistencia *sí y sólo sí* es inconsistente.

Primer teorema de Gödel I

- Consideremos los axiomas de Peano, la suma, el producto y los símbolos básicos de la lógica.
- Asociar todos los elementos básicos de la teoría a números (p.ej.: $0 \to 000$, $= \to 111$, $\sim \to 333$, $1 \to 222$, etc.).
- Los axiomas de la teoría y los teoremas (afirmaciones verdaderas demostrables dentro del sistema) también son números (p.ej.: $0 \neq 1 \to 000333111222$).
- Las reglas lógicas y las demostraciones de teoremas son funciones que transforman números en números.

Primer teorema de Gödel II

Esta afirmación no es un teorema del sistema.

- Si la afirmación fuera falsa, entonces sería un teorema (demostrable dentro del sistema) y además falso: imposible.
- Si la afirmación es verdadera, entonces no es un teorema. O sea: Hay afirmaciones verdaderas que no se pueden demostrar.
- A esta afirmación también se le puede asignar un número, o sea que es un elemento válido del sistema, pero ese número no es el número de Gödel de ningún teorema del sistema.

Comentarios

- *Un sistema tan amplio como los números naturales inevitablemente puede hacer afirmaciones acerca de sí mismo*.
- En 1977 Paris and Harrington encontraron una afirmación acerca de los números naturales que es indemostrable dentro del sistema de Peano.
- Goodstein, Kruskal y Chaitin encontraron otras variantes.
- Algunos piensan que ciertas conjeturas acerca de los números naturales que hasta hoy no se han podido demostrar, son verdades Gödelianas (p.ej: Todo número par se puede escribir como la suma de dos números primos (Goldbach)).

Segundo teorema de Gödel

Sea P la afirmación indemostrable del primer teorema.

- El primer teorema dice: Si el sistema es consistente entonces P es indemostrable.
- Si el sistema es consistente y esta consistencia fuera *demostrable*, de la demostración del primer teorema se seguiría que se ha *demostrado* la afirmación P es indemostrable. Imposible. Luego, si el sistema es consistente, la consistencia no se puede demostrar dentro del sistema.
- Si el sistema fuera inconsistente, cualquier cosa se podría demostrar, inclusive que el sistema es consistente(!).

Comentarios

- Se puede demostrar que el subconjunto consistente más grande dentro del sistema de Peano no tiene ninguna cadena lógica que termine en una contradicción.
  Esto es *casi* una demostración de la consistencia del sistema de Peano, pero más allá no se llega.
- Límites a los programas de Hilbert y Russell.
- Límites a ciertos programas de Inteligencia Artificial: No todas las afirmaciones verdaderas son computables por métodos automáticos.

De vuelta a los contenidos

Lakatos y el progreso de la ciencia

Cómo se organiza el conocimiento matemático?

- La certeza absoluta ya no es un objetivo.
- El conocimiento matemático se construye y refina artesanalmente, hasta remitirlo a un sistema básico de axiomas.
- La elección, funcionalidad y reconocimiento de consistencia del sistema de axiomas va por cuenta del usuario.
- No obstante la incerteza, la utilidad y precisión de la matemática superan cualquier otra creación intelectual humana.

De vuelta a los contenidos

Referencias y material de lectura

Cómo seguimos leyendo?

- Wikipedia (buscar bajo Hilbert, Russell, Gödel, etc.).
- Libros de historia de la matemática: Kline, Katz, etc.
- Roger C. Lyndon, *Notes on Logic*, Van Nostrand, 1966.
- Imre Lakatos, *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge University Press, 1976.

De vuelta a los contenidos